数理解析研究所講究録
907 巻 1995 年 131-140



# 反自己双対計量の収束・退化について

静岡大教養　芥川　和雄 (Kazuo Akutagawa)

## Section 1. 序

幾何構造として、計量の反自己双対性は共形不変な概念であり、その存在問題は新たな非線形問題および微分位相不変量を提出している (cf. [Fl, T] )。また反自己双対計量は比較的広いクラスの 4 次元多様体上でその存在が知られており、共形幾何の重要かつ適切な対象である。今 M を向き付け可能な 4 次元コンパクト多様体とする。M 上の反自己双対計量のモデュライ空間 $\mathcal{M}$ (M) の研究、特にその境界 $\partial\mathcal{M}$ (M) の研究は、一般の計量の収束・退化の研究への良い指針を与え、また底空間 M のトポロジーとの関連においても重要である。その興味深い具体的現象として、境界 $\partial\mathcal{M}$(M) のある退化した計量が M に、共形平坦な orbifold X といくつかの特殊な反自己双対 orbifolds $\{Y_j\}$ との、一般化された連結和分解を自然に与えることが、いくつかの例で知られている (See [I 2].) 。本論説では、Sobolev 半径と言う局所的幾何学量を新たに導入し、それを物差しとして、M の thin-thick 分解および反自己双対計量の境界 $\partial\mathcal{M}$ (M) での収束・退化の解析の様子の現状報告を行なう。

## Section 2. 反自己双対計量について

M を向き付け可能な 4 次元コンパクト多様体とする。M 上のリーマン計量 g を与える。そのとき g から定まるホッジの star operator $*$ は、M 上の 2-form 全体のなす空間 $\Omega^2$ に自然に作用する。$*^2 = id_{\Omega^2}$ となることから、$\Omega^2$ は $\pm 1$ 固有空間 $\Omega^2_\pm$ に直和分解される。その分解に従って、g のリーマン曲率 $R_g$ は次の様に分解される ($\Omega^2$ の endomorphism $R_g : \Omega^2 \longrightarrow \Omega^2$ と見なして)。

$$\omega^{ij} \longmapsto \frac{1}{2} R^{ij}{}_{kl}\,\omega^{kl}$$

$$R_g = \begin{pmatrix} W_g^+ & 0 \\ 0 & W_g^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \overset{\circ}{Ric}_g \\ (\overset{\circ}{Ric}_g)^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{12} S_g & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} S_g \end{pmatrix}$$

ここで、$W_g^\pm$ はワイル共形曲率テンソル $W_g$ の (anti-)self-dual part 、$\overset{\circ}{Ric}_g$ はリッチ曲率テンソル $Ric_g$ の trace-less part および $S_g$ はスカラー曲率を表す。

<u>定義</u>　M 上の計量 g は $W_g^+ \equiv 0$ (resp. $W_g^- \equiv 0$) のとき、<u>反自己双対計量</u> (resp. <u>自己双対計量</u>) と呼ばれる (以後、(反) 自己双対計量を (A)SD 計量と略記する)。

注　（イ）計量 g の共形変形 $h = e^{\varphi}\cdot g$ に対して、$W_h = e^{-\varphi}\cdot W_g$, $*_h = *_g$ となるので、$W_h^{\pm} = e^{-\varphi}\cdot W_g^{\pm}$ が成立する。よって計量 g の（反）自己双対性は共形不変な概念であり、その共形類 $[g] = \{e^{\varphi}\cdot g \mid \varphi \in C^{\infty}(M)\}$ に対して定義される概念となる。
（ロ）M の Hirzebruch の符号数 $\tau(M)$ は以下の様に積分表示される。

$$\tau(M) = \frac{1}{12\pi^2}\int_M \left(|W_g^+|^2 - |W_g^-|^2\right) dv_g \left(\geq -\frac{1}{12\pi^2}\int_M |W_g^-|^2 dv_g\right)$$

ここで最後の等号成立は、g が ASD 計量のときである。これにより g が ASD 計量であるという条件下では、(M, g) が共形平坦となるのは $\tau(M) = 0$ のときに限ることがわかる。
（ハ）M 上のリーマン計量全体のなす空間 Riem(M) 上で定義される次の汎関数 $I$ を考える（この汎関数 $I$ は共形不変でもある）。

$$\begin{array}{rcl} I : \mathrm{Riem}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & \frac{1}{2}\int_M |W_g|^2 dv_g \left(\geq 24\pi^2 |\tau(M)|\right) \end{array}$$

ここで等号成立は、g が (A)SD 計量のときである。よって g が ASD 計量のとき、g は汎関数 $I$ の最小値を与え、さらに $S_g \equiv \mathrm{const.}$ とすると、g のリッチ曲率は次の非線型方程式をみたす (cf. [D, Ko 1])。

$$\begin{aligned} \Delta_g \mathrm{Ric}_g &= \mathrm{Ric}_g * \mathrm{Ric}_g + W_g^- * \mathrm{Ric}_g \\ &= R_g * \mathrm{Ric}_g \end{aligned}$$

例 1（ASD 計量の例、その他）
（1）(M, g)：向き付けられた共形平坦 4 次元多様体
（2）$(\overline{\mathbb{C}P}^2, g_{FS})$：（複素構造と）逆向きの 2 次元複素射影空間（$g_{FS}$ は Fubini-Study 計量）
（3）(M, g) を 4 次元 Kähler 多様体とする。そのとき g が ASD 計量であることと、$S_g \equiv 0$ であることは同値である(cf. [D, I 1])。
（4）$\ell\overline{\mathbb{C}P}^2$ $(\ell \geq 0)$ 上には $S_g > 0$ となる ASD 計量 g が存在する(cf. [P, Fl, L])。
（5）$k(S^1 \times S^3)\# m(S^2 \times \Sigma_n)\# \ell\overline{\mathbb{C}P}^2$ $(k \geq 0, n \geq 2, \ell \geq m+1)$ 上には ASD 計量が存在する(cf. [LS 1, Ki])。
（6）$S^2 \times S^2$ や $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ は ASD 計量を決して許容しない。
（7）Taubes の存在定理 [T]：与えられた向き付け可能で滑らかな 4 次元コンパクト多様体 M に対して、ある自然数 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、多様体 $M \# \ell\overline{\mathbb{C}P}^2$ は ASD 計量を許容する（ここで $\ell$ は、$\ell \geq n_0$ となる任意の自然数）。

このとき、M の Taubes 不変量 t(M) を次で定義する(cf. [LS 2])。
t(M) := min { 上記の主張をみたす自然数 $n_0$ }

例 2　次の左右の 4 次元多様体はいずれも微分同相である(cf. [I 2])。

（イ）$\overline{\mathbb{C}P}^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \cong \hat{X}_{EH} \# \hat{X}_{EH}$ ；ここで $\hat{X}_{EH}$ は Eguchi-Hanson ALE gravitational instanton $X_{EH}$ の共形コンパクト化を表す。

（ロ）$4\overline{\mathbb{C}P}^2 \cong (S^1 \times S^3)/\langle\sigma_1\rangle \# 4\hat{X}_{EH}$ ；ここで $\sigma_1$ は 4 個の固定点を持つある involution を表す。

（ハ）K3 曲面 $\cong T^2/\langle\sigma_2\rangle \# 16\hat{X}_{EH}$ ；ここで $\sigma_2$ は１６個の固定点を持つある involution を表す。

ただし上記の（イ）～（ハ）の右辺はいずれも、一般化された連結和を表す。
上記の分解はどれも興味深いものであるが、特に（ロ）、（ハ）は一つの楽観的予想を提出する。すなわち、例外的な場合の M を除いて、M 上の ASD 計量のモデュライ空間の境界のある退化した計量が M に、共形平坦な orbifold X といくつかの特殊な反自己双対 orbifolds $\{Y_j\}$ との、一般化された連結和分解を自然に与えるのではないか？そのため、その境界での ASD 計量の収束・退化の一般的解析を行なう。

## Section 3． 調和半径と Sobolev 半径について

最初に Anderson 等によって定義され発展させられた、リーマン多様体の $L^{2,p}$ 調和半径について解説する。

定義　(N, g) を完備な n 次元リーマン多様体とする。正数 $p > \frac{n}{2}$, $L > 0$ を与える。そのとき、正数 $r_H(x) = r_H(x; g, p, L)$ が点 $x \in N$ における $L^{2,p}$ 調和半径とは、次の条件を満たす最大の測地球 $B_r(x) \subset N$ の半径 r を言う。
「条件」　$B_r(x)$ 上のある調和座標系 $(\varphi, \{x^i\})$ が存在して不等式

$(H)_1$　$e^{-L}\cdot\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq e^{L}\cdot\delta_{ij}$ on $\tilde{B} = \varphi(B_r(x)) \subset \mathbb{R}^n$ （2 次形式として）

$(H)_2$　$r^{\alpha-1}\|\partial g_{ij}\|_{L^p(\tilde{B})} + r^{\alpha}\|\partial\partial g_{ij}\|_{L^p(\tilde{B})} \leq L$　for　i, j = 1, 2, ---, n

が成立する。ただし、$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ & $\alpha = 2 - \frac{n}{p} > 0$ とする。

注　（イ）　$L^{2,p} \subset C^{\alpha}$　if　$p > \frac{n}{2}$ (Sobolev's embedding)
　　（ロ）　$h = \lambda^2\cdot g \longrightarrow r_H(x; h) = \lambda\cdot r_H(x; g)$

$L^{2,p}$ 調和半径が下から評価されているとき、つぎのコンパクト性定理が成り立つ。

定理A (Anderson [An 2]). $\{(N_i, g_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ を n 次元コンパクト・リーマン多様体の列とする。ある正数 $r_0$, $V_0$ が存在して次の条件を満たすものとする。

(1) $r_H(x) \geqq r_0 > 0$ for all $x \in N_i$, $i \in \mathbb{N}$

(2) $V_{g_i} := \mathrm{vol}(N_i, g_i) \leqq V_0$ for all $i \in \mathbb{N}$.

そのとき、部分列 $\{j\}\subset\{i\}$, 滑らかなコンパクト n 次元多様体 $N_\infty$, $N_\infty$ 上の $C^\alpha \cap L^{2,p}$ 計量 $g_\infty$ および微分同相写像 $\Phi_j : N_\infty \longrightarrow N_j$ が存在して

$$\Phi_j{}^* g_j \xrightarrow[\text{converges}]{} g_\infty \quad \begin{array}{l}\text{in the } C^{\alpha'} \text{ topology for } \alpha' < \alpha \\ \text{\& weakly in the } L^{2,p} \text{ topology}\end{array}$$

が成立する。

上の定理より、リーマン多様体の収束を得るためには $L^{2,p}$ 調和半径の下からの評価が必要となる。そのため次の局所的幾何学量を導入する。

定義 (N, g) をコンパクトな n 次元リーマン多様体とする。正数 $\kappa > 0$ を与えて固定する（特に $\kappa < n(n-1)\cdot \mathrm{vol}\, S^n(1)^{2/n}$ と選んでおく）。そのとき、（定数 $\kappa$ に対する）点 $x \in N$ における $L^{1,2}$ Sobolev 半径 $s^\kappa(x) = s^\kappa(x; g)$ を次で定義する。

$$s^\kappa(x) := \sup \left\{ r > 0 \;\middle|\; \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{正数 } r>0 \text{ は次の (i), (ii) を満たす。}} \\ \text{(i)} & r \leqq \mathrm{diam}(N, g) \\ \text{(ii)} & \left( \int_{B_r(x)} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ & \leqq \frac{1}{\kappa} \int_{B_r(x)} |du|^2 dv_g + \frac{1}{V_g{}^{2/n}} \int_{B_r(x)} u^2 dv_g \quad \text{for } u \in C^\infty(B_r(x)) \end{array} \right\}$$

注 （イ） $h = \lambda^2 \cdot g \longrightarrow s^\kappa(x; h) = \lambda \cdot s^\kappa(x; g)$

（ロ）上記の Sobolev 半径に類似の幾何概念は既に Anderson [An 2] や Yang [Y] によって導入されており、下記の定理 B のタイプの定理も既に得られている。しかし後述の様に ASD 計量の thick part の正則性を記述する上では、その物差しとしてこの Sobolev 半径が適している。

$\mathrm{Riem}_1(n) := \{(N, g) \mid V_g = \mathrm{vol}(N, g) = 1$ となる n 次元コンパクト・リーマン多様体$\}$ とする。そのとき、$L^{2,p}$ 調和半径はある条件の下に $L^{1,2}$ Sobolev 半径で下から評価される。

<u>定理 B.</u> $p > \frac{n}{2}$ とする。$(N, g) \in \mathrm{Riem}_1(n)$ に対して、

(#) $$\int_{B_r} |\mathrm{Ric}_g|^p \, dv_g \leq K \quad \text{for} \quad B_r \subset N : \text{a geodesic ball of radius } r\,(>0)$$

が満たされているならば、次のことが成り立つ。

「 ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, \kappa)$, $c_0 = c_0(n, p, \kappa, L, K)$ が存在して、もし次の不等式が満たされるならば

$$\int_{B_r} |R_g|^{\frac{n}{2}} \, dv_g \leq \varepsilon_0,$$

次の評価式が成立する。

$$\min\{r_H(x), \mathrm{dist}_g(x, \partial B_r)\} \geq c_0 \cdot \min\{s^{\kappa}(x), \mathrm{dist}_g(x, \partial B_r)\} \qquad \text{for all} \quad x \in B_r$$ 」

条件 (#) を仮定することは共形幾何の立場から一般的に不自然である。しかし ASD 計量の計量としての調和性（Sec.2, 注（ハ））は、Sobolev 半径を通して反映され、条件 (#) は幾何的に適切な条件下で自然に導かれる。すなわち次が成立する。

<u>命題</u> (cf. [N 2]). g をコンパクトで向き付け可能な 4 次元多様体 M 上の、スカラー曲率が一定な ASD 計量とする。正数 $\kappa$ と自然数 m に対して、ある正数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\kappa, m)$, $C = C(\kappa, m, V_g)$ が存在して、次が成立する。

「 測地球 $B_r(x)$ ($r \leq s^{\kappa}(x)$) 上で、

$$\int_{B_r(x)} |R_g|^2 \, dv_g \leq \varepsilon_0$$

が満たされているならば、次の評価式が得られる。

$$\left(\int_{B_{r/2}(x)} |\mathrm{Ric}_g|^{2^m} dv_g\right)^{1/2^m} \leq \frac{C}{r^{2-4/2^m}} \left(\int_{B_r(x)} |R_g|^2 dv_g\right)^{1/2}$$ 」

Section 3. 反自己双対計量のモデュライ空間について

M を向き付け可能な 4 次元コンパクト多様体とする。集合 ASD(M) を次のように定める。

$$\mathrm{ASD}(M) := \left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) } g : M \text{ 上の ASD 計量} \\ \text{(ii) } g : M \text{ 上の山辺計量} \\ \text{(iii) } \mathrm{vol}(M, g) = 1 \end{array} \right\}$$

そのとき ASD 計量のモデュライ空間 $\mathcal{M}(M)$ は、 $\mathcal{M}(M) = ASD(M)/Diff_{+}(M)$ と具体的に表示される。ただし、$Diff_{+}(M)$ は向きを保つ M の微分同相写像全体の成す群を表す。定数 $\mu_0$ (負でもよい) に対して、集合 ASD $(M;\mu_0)$ および $\mathcal{M}(M;\mu_0)$ を次の様に定める。

$$ASD(M;\mu_0) = \{ g \in ASD(M) \mid \mu(M, [g]) \geq \mu_0 \}, \qquad \mathcal{M}(M;\mu_0) = ASD(M;\mu_0)/Diff_{+}(M)$$

ただし、$\mu(M, [g])$ は共形類 $[g]$ の山辺不変量を表す。このとき

$$\mathcal{M}(M) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(M; -k), \qquad \mathcal{M}(M; -k) \subset \mathcal{M}(M; -(k+1))$$

となる。よって境界 $\partial\mathcal{M}(M)$ の解析ためには、境界 $\partial\mathcal{M}(M; -k)$ の解析が必要であることがわかる。そこで一般に、定数 $\mu_0$ に対して列 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset ASD(M;\mu_0)$ を考え、その収束・退化を調べる。

注　(イ) 山辺不変量に関しては不等式 $\mu(M, [g]) \leq 12 \cdot vol\,(S^4(1))^{1/2}$ が成立し、4 次元のガウス・ボンネの定理とあわせて、$g \in ASD(M;\mu_0)$ の曲率積分は $\mu_0^2$, $\tau(M)$ およびオイラー標数 $\chi(M)$ で次の様に評価される。

$$\int_M |R_g|^2 dv_g \leqq 32\pi^2 (3\,\tau(M) - \chi(M)) + \frac{1}{3} \max\{ \mu_0^2,\ 144 \cdot vol\,(S^4(1)) \}$$

(ロ) 正確には、空間 $\mathcal{M}(M)$ が "真" のモデュライ空間となるかどうかは、現時点では未解決問題である。それは次の問題と同値である。
「M 上の体積 1 の ASD 山辺計量 $g_1, g_2$ に対して、$[g_1] = [g_2]$ となるならば、
　共形変換 $\varphi \in Conf(M)$ が存在して $\varphi^* g_1 = g_2$ となるか？」
(ハ)　$\mu_0 > 0$ のときの ASD$(M;\mu_0)$ の収束・退化については、既に中島氏 [N 2] による結果がある (cf. [Ak])。しかし Einstein 計量の収束・退化に関する [N 1], [An 1], [BKN], [B] の様な詳しい結果は得られておらず、その前にはいくつかの技術的な壁が立ちはだかっている。

$\mu_0 \leq 0$ のとき、反自己双対計量 $g \in ASD(M;\mu_0)$ に対して、次の技術的な条件を考える。

| | |
|---|---|
| (*) | ある正数 $r_0$ (十分小) , $p > 2$, $\Lambda$ が存在して、もし $s^k(x; g) \leq r_0$ ならば、次が成り立つ。 $\int_{B_{r_0}(x)} \lvert Ric_g \rvert^p dv_g \leqq \Lambda$ |

注　現時点では Sobolev 半径が小さくなって行く点の近傍の解析が得られていないので、上記の様な a priori な条件を設けた。

定義　(N, g) を n 次元コンパクト・リーマン多様体とする。正数 $\delta$ に対して、

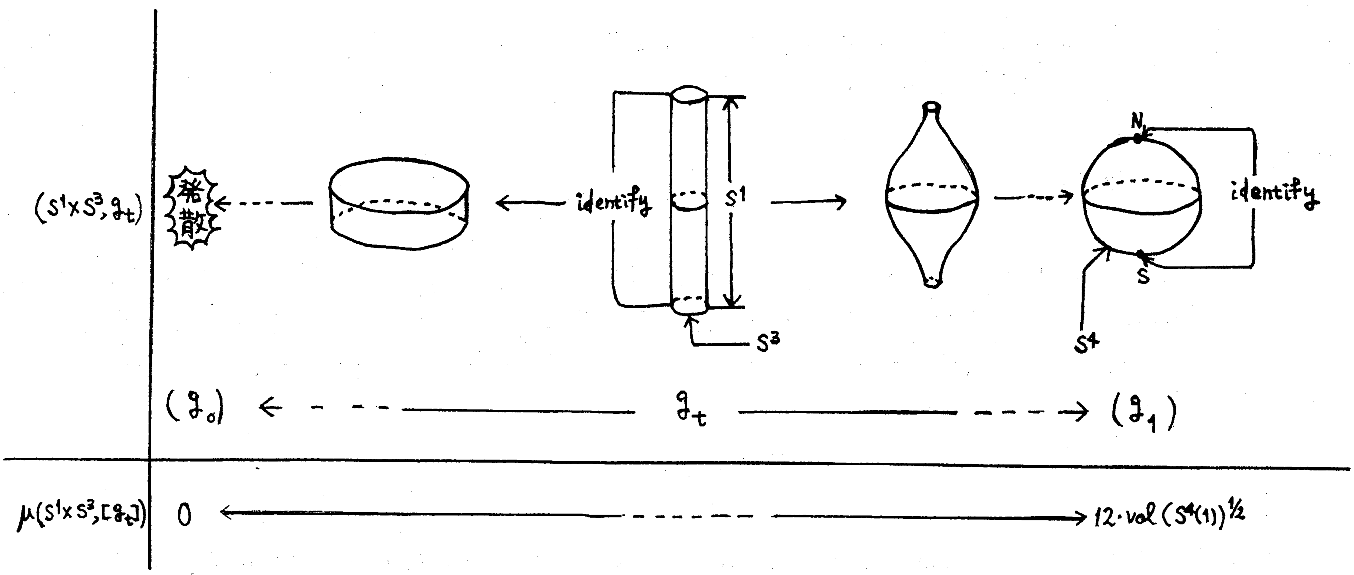
$N^{\delta}(g) := \{ x \in N \mid s^{k}(x; g) > \delta \}$ --- the thick part of (N, g)
$N_{\delta}(g) := \{ x \in N \mid s^{k}(x; g) < \delta \}$ --- the thin part of (N, g)

とおく。

例　$S^1 \times S^3$ 上の共形平坦計量のモデュライ空間については、

$$\mathcal{M}(S^1 \times S^3) = \mathcal{M}(S^1 \times S^3; 0) = (0, 1) \times (SO(4)/\mathrm{conj.})$$

となることが知られている。また $S^1 \times S^3$ 上の共形平坦な山辺計量のある 1 - パラメーター族 $\{g_t\}_{t \in (0,1)}$ が存在して、その振る舞いは下記の図の様になる(cf. [Ko 2, S])。



このとき、次が示せる。

主定理　列 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset$ ASD(M; $\mu_0$) は条件（$*$）を満たすものとする。そのときある正数 $\delta_0 = \delta_0(\mu_0, \kappa, r_0, p, \Lambda, \tau(M), \chi(M))$ と非負整数 $\ell = \ell(\mu_0, \kappa, \tau(M), \chi(M))$ および $\tilde{\ell} = \tilde{\ell}(\mu_0, \kappa, \tau(M), \chi(M))$ が存在して、任意の正数 $\delta$ ($\leq \delta_0$) に対して次が成立する。

（1）（thin part について）有限個の部分集合 $\tilde{\mathcal{S}}_\delta(i) = \{y_1(i), \cdots, y_{\tilde{\ell}}(i)\} \subset M_{2\delta}(g_i)$ が存在して、各 $(M_{2\delta}(g_i) \setminus \bigcup_{m=1}^{\tilde{\ell}} B_{200\cdot s^k(y_m(i))}(y_m(i)), g_i)$ は F - structure (cf. [Fu]) を許容する。

（2）（thick part について）　$\#\{i \in \mathbb{N} \mid M^{2\delta}(g_i) \neq \phi\} = +\infty$ とすると、部分列 $\{j\} \subset \{i\}$, 正の直径を持つコンパクト距離空間 $(X^\delta, d^\delta)$ および有限個の部分集合 $\mathcal{S}^\delta = \{x_1, \cdots, x_\ell\} \subset X^\delta$ が存在して次が成り立つ。

（2 - a）$M^\delta(g_j)$ は、Gromov - Hausdorff 距離に関して、$(X^\delta, d^\delta)$ に収束する。
（2 - b）$X^\delta \setminus \mathcal{S}^\delta$ は $C^\infty$ 多様体の構造を持ち、かつ $X^\delta \setminus \mathcal{S}^\delta$ 上には距離 $d^\delta$ と両立する反自己双対計量 $g^\delta$ が存在する。
（2 - c）任意のコンパクト部分集合 $K \subset X^\delta \setminus \mathcal{S}^\delta$ に対して、中への微分同相写像 $\Phi_j : K \longrightarrow M^\delta(g_j)$（j：十分大）が存在して、

$$\Phi_j{}^* g_j \xrightarrow[\text{converges}]{} g^\delta \quad \text{in the } C^\infty \text{ topology on } K$$

が成立する。

（3）$\delta_k \longrightarrow 0$ ($\delta_{k+1} < \delta_k < \delta_0$) となる正の数列 $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、（2）における $X^\delta$ および $\mathcal{S}^\delta$ は、$X^{\delta_k} \subset X^{\delta_{k+1}}$, $\mathcal{S}^{\delta_k} = \mathcal{S}^{\delta_0}$ (for all $k \in \mathbb{N}$) とできる。

## 参考文献


[Ak]　Akutagawa K., Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds, Differ. Geom. and Its Appl. 4 (1994), 239 - 258.

[An 1]　Anderson M., Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 455 - 490.

[An 2] __________, Degeneration of metrics with bounded curvature and applications to critical metrics of Riemannian functionals, in " Differential Geometry " ed. by R. Greene and S.-T. Yau, Proc. Sympos. in Pure Math. Vol. 54, Part 3, A.M.S. (1993), 53 - 79.

[B] Bando S., Bublling out Einstein manifolds ; correction and addition, Tohoku Math. J. 42 (1990), 205 - 216, 587 - 588.

[BKN] Bando S., Kasue A. and Nakajima H., On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth, Invent. Math. 97 (1989), 313 - 349.

[D] Derdzinski A., Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four, Compos. Math. 49 (1983), 405 - 433.

[Fl] Floer A., Self-dual conformal structures on $\ell\,\mathbb{C}P^2$ , J. Differ. Geom. 33 (1991), 551 - 574.

[Fu] Fukaya K., Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and its applications, in " Recent Topics in Differential and Analytic Geometry " ed. by T. Ochiai, Advanced Studies in Pure Math., 18-I (1990), 143 - 238.

[I 1] Itoh M., Self-duality of Kähler surfaces, Compos. Math. 51 (1984), 265 - 273.

[I 2] ______, Half conformally flat metrics and connected sums of orbifolds, preprint.

[Ki] Kim J., On the scalar curvature of self-dual manifolds, Math. Ann. 297 (1993), 235 - 251.

[Ko 1] Kobayashi O., On a conformally invariant functional of the space of Riemannian metrics, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 373 - 389.

[Ko 2] __________, On the large scalar curvature, Research Report 11, Depart. Math. Keio Univ., 1985.

[L] LeBrun C., Explicit self-dual metrics on $\mathbb{C}P^2 \# \cdots \# \mathbb{C}P^2$ , J. Differ. Geom. 34 (1991), 223 - 253.

[LS 1] LeBrun C. and Singer M., Existence and defonation theory for scalar-flat Kähler metrics on compact complex surfaces, Invent. Math. 112 (1993), 273 - 313.

[LS 2] _________, A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds, Math. Ann. 300 (1994), 165 - 180.

[N 1] Nakajima H., Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35 (1988), 411 - 424.

[N 2] _________, Convergence of anti-self-dual metrics, " Conference on Variational Problems in Differential Geometry and Partial Differential Equations at Trieste, 1993 August.

[P] Poon Y. S., Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature, J. Differ. Geom. 24 (1986), 97 - 132.

[S] Schoen R., Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, Lecture Notes in Math. 1365 (Springer-Verlag, New york, 1989), 120 - 154.

[T] Taubes C. H., The existence of anti-self-dual conformal structures, J. Differ. Geom. 36 (1992), 163 - 253.

[Y] Yang D., Riemannian manifolds with small integral norm of curvature, Duke Math. 65 (1991), 501 - 510.